Билет 1

Билет 2

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^4 + y^4 < 1 \\ u|_\Gamma = 2018 \end{cases}$$

Решение. Согласно принципу максимума и минимума гармонической функции, решение — $u = 2018$ (так как всюду на границе 2018). Оно единственно из единственности решения задачи Дирихле.

Билет 3

Билет 4

Пусть $u_{xx} - u_{yy} = 0$ и $u \in C^2$. Докажите, что

$$u_x(0, z) + u_y(0, z) = u_x(z, 0) + u_y(z, 0)$$

Билет 5

Решить задачу:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -(x^4 + y^4), \quad x^4 + y^4 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Билет 6

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^4 + y^4 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Решение. Решения не существует т.к. не выполняется условие разрешимости задачи Неймана.

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

Билет 7

Билет 8

Билет 9

Корректно ли поставлена задача?

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varepsilon sin(nx) \end{cases}$$

Решение. Нет, не корректно. Найдем решение задачи в виде $\varepsilon T(t) sin(nx)$. Подставим в уравнение и получим $u(x,t) = \varepsilon e^{n^2 t} sin(nx)$. Тогда если $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| < \delta$, то $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| e^{n^2 t} sin(nx) = \delta e^{n^2 t} sin(nx)$. При $x = \frac{\pi}{2n}$ получим, что разность решений стремится к бесконечности при стремлении t к бесконечности. Противоречие с устойчивостью решения.

Билет 10

Найти логарифмический потенциал двойного слоя вне круга с $\nu = \text{const}$ на границе.

Решение. $V = 0$, из разрыва потенциала на границе и $\nu = \text{const}$.

Билет 11

Билет 12

Корректно ли поставлена задача:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varepsilon sin(kx) \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение. **Disclaimer**(gritukan): я не знаю, зачли мне эту задачу или нет, так что не ручаюсь за корректность решения.

Будем искать решение в виде $u(x,t) = \varepsilon sin(kx)T(t)$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \varepsilon sin(kx)T''(t) - k^2 \varepsilon sin(kx)T(t) = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ T(0) = 1 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

Сократим первое уравнение системы на $\varepsilon sin(kx)$ и получим, что $T''(t) - k^2 T(t) = 0$. Общий вид решения такого уравнения имеет вид $T(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$. Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $T(t) = \frac{e^{kt}}{2} + \frac{e^{-kt}}{2}$ и $u(x,t) = \varepsilon sin(kx)(\frac{e^{kt}}{2} + \frac{e^{-kt}}{2})$.

Докажем, что решение неустойчиво. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} + v_{xx} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varepsilon sin(kx) + \vartheta sin(px) \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $|v_{t=0} - u_{t=0}| \leq |\vartheta sin(px)| \leq |\vartheta|$, однако $|u(x,t) - v(x,t)| = |\varepsilon sin(px)(\frac{e^{pt}}{2} + \frac{e^{-pt}}{2})|$. Таким образом, для сколь угодно малой ϑ можно выбрать сколь угодно большое p и сделать $|u(x,t) - v(x,t)|$ сколь угодно большим, а значит решение неустойчиво.

Билет 13

Посчитать логарифмический потенциал с $\nu = const$ (ν - плотность момента) прямой $y = 0$.

Решение. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $M \in Ox$ и без ограничения общности $M = (0,0)$. Тогда $W(M) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\widehat{\vec{n}_P, \vec{x}_P})}{|x_P|} \nu dx_P = 0$, так как $\forall P \in Ox : \quad (\widehat{\vec{n}_P, \vec{x}_P}) = 90^\circ \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{n}_P, \vec{x}_P}) = 0$.

2. Пусть $M \notin Ox$, и без ограничения общности, в силу бесконечности оси Ox, будем считать, что M лежит на оси Oy и имеет координаты $(0, y_M)$. Тогда косинус угла между нормалью, восстановленной из точки P с координатой $(x_P, 0)$, и вектором $\vec{R}_{PM}$ равен $\dfrac{y_M}{\sqrt{x_P^2 + y_M^2}}$. Значит, потенциал равен интегралу $W(M) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{y_M}{x_P^2 + y_M^2} \nu dx_P = \nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d(\frac{x_P}{y_P})}{(\frac{x_P}{y_P})^2 + 1} = \nu \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x_P}{y_P}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \nu \cdot \pi$.

Таким образом,

$$W(M) = \begin{cases} 0, \quad M \quad \text{лежит на прямой} \quad y = 0 \\ \nu \cdot \pi, \quad M \quad \text{не лежит на прямой} \quad y = 0 \end{cases}$$

Билет 14

Билет 15

Корректно ли поставлена задача:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi \\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\pi} = 0 \\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решение. Нет, не корректно. Для корректности требуется единственность решения.

Рассмотрим $u = \sin(ny)\cos(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$

$$u_{xx} = -n^2 \sin(ny)\cos(nx)$$
$$u_{yy} = -n^2 \sin(ny)\cos(nx)$$
$$u_{xx} - u_{yy} \equiv 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -n \sin(ny)\sin(nx) \overset{x \in \{0,\pi\}}{=\!=} 0$$
$$u\big|_{y \in \{0,\pi\}} = 0$$

Примечание: в условии была опечатка $u_{xx} - u_{xx} = 0$. Естественно имелось ввиду $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Билет 16

$$u(x,t) \in C^2(R^2)$$
$$u_{xx} = u_{tt}$$

Доказать равенство:

$$u_x(0,p) + u_t(0,p) = u_x(p,0) + u_t(p,0)$$

Решение. $u_{xx} = u_{tt}$ уравнение колебаний, следовательно по формуле Даламбера $u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}$, $a = 1$.

$$2u_x(0,p) = f'(p) + f'(-p)$$
$$2u_t(0,p) = f'(p) - f'(-p)$$
$$2u_x(p,0) = f'(p) + f'(p) = 2f'(p)$$
$$2u_t(p,0) = f'(p) - f'(p) = 0$$

Подставим в искомое равенство, сократив 2.

$$f'(p) + f'(-p) + f'(p) - f'(-p) = 2f'(p) + 0$$

Равенство выполняется.

Билет 17

Билет 18

Можно ли применить формулу среднего значения для функции

$$u(x,t) = x^2 + y^2 - xy$$

Билет 19

Найти сопряженный оператор:

$$L[u] = xu_{xx} - yu_{yy} + x^2u_x + y^2u_y + xyu$$

Решение.

$$M[v] = \frac{\partial^2(vx)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(vy)}{\partial y^2} - \frac{\partial(x^2v)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2v)}{\partial y} + xyv$$

Билет 20

Найти сопряженный оператор:

$$L[u] = yu_{xx} + xu_{yy} + y^2u_x - x^2u_y - x^2y^2u$$

Примечание: я не уверен в знаках слагаемых в условии. Решение все равно примитивное - по формуле из любых конспектов

Решение.

$$M[v] = \frac{\partial^2(yv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(xv)}{\partial y^2} - \frac{\partial(y^2v)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2v)}{\partial y} - x^2y^2v$$

Билет 21

Билет 22

Билет 23

Решить задачу:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

Билет 24

Билет 25

Билет 26

Найти логарифмический потенциал двойного слоя для круга радиуса R с постоянной плотностью ν_0.

Решение.

$$W(M) = \begin{cases} 2\pi\nu_0, \quad \text{внутри круга} \\ \pi\nu_0, \quad \text{на границе круга} \\ 0, \quad \text{вне круга} \end{cases}$$